数 学 科 学 習 指 導 案

日　時	令和　4年12月2日（金）	場　所	会議室
対　象	普通科　2年2組　　42名 （男子26名，女子16名）	教科書	新編数学Ⅱ （出版社　数研出版）
科　目	数学Ⅱ	指導者	○○

1．　単元名

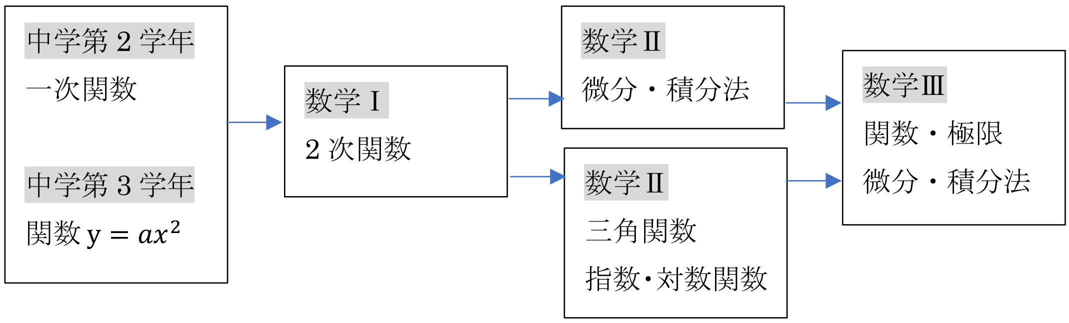
第6章　微分法と積分法　　第1節　微分係数と導関数

2．　指導の立場

（1）　教材観

微分の概念は、いろいろな事象を数理的に取り扱うのに有用である。関数に関しては、中学校第2学年で一次関数は変化の割合が一定であることを、第3学年で関数$y = ax^2$は変化の割合が一定でないことを取り扱い、「数学Ⅰ」で一般の二次関数について、変化やグラフの特徴を調べて二次関数の値の変化について理解を深めている。ここでは、簡単な多項式で表される関数に限定して瞬間の速さなどの具体的な事象の考察を通して微分の考えを理解し、その考えの有用性を認識できるようにするとともに、微分の考えを活用して問題を解決する力などを養う。

また、本単元は、次章の積分法や数学Ⅲで学習する関数・極限・微分法・積分法の基盤となる。



（2）　生徒観

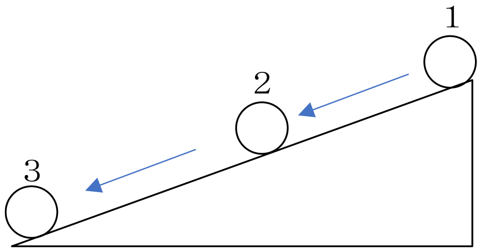
本校は、国公立4年制大学への進学を希望する生徒が大半を占める普通科の学校である。このクラスは理系標準クラスであり、数学Ⅱ（3単位：本授業者担当）・数学 B（3単位）はともにクラス固定で授業を行っている。3年次では全員が数学Ⅲを履修する。

活発なクラスであり、ペア・グループ活動に積極的に参加し発言できる。教員の発問に対しても、自分の考えや疑問に思ったことを発言する力がある。1つの問題に対して様々な考え方ができることに対して素直に感動し自らの答案に取り入れようとする生徒もいる。中には数学に苦手意識をもつ生徒もおり、そのような生徒は個人で応用的な問題に取り組む際には、見通しを立てることができず手が止まってしまうことがある。しかし生徒同士の教え合いの場では周囲の生徒と協力をしながら問題を解決しようと前向きに取り組む姿が見られる。

一方で生徒の解答を見ると、解答の根拠が不十分なものや、意味や本質を理解しないまま“なんとなく”解答を作る様子も見られる。AT（到達度テスト）では、公式を利用する問題や、教科書の例題レベルの問題では得点できるものの、本質は教科書の問題と同じであるが問い方を変えた問題や、複数の単元を融合させた問題では、見通しを立てることができず白紙が目立つ。

また、これまでに学習した 2 次関数・三角関数・指数関数・対数関数については、導入として点をプロットし

繋ぐことでグラフの概形を知るという活動を行っている。
1 年次には全員物理基礎を履修しており、平均の速度や瞬間の速度について学んでいる。微分はニュートン力学により発展し、物理学と微積分には深い関わりがあることは物理基礎の教科書に記載されており、$x-t$グラフの接線の傾きが瞬間の速度を意味するという知識はあるものの、理解が伴っている生徒は少ない。2 年次では21人が物理、21人が生物を履修している。
生徒のレディネステスト（11月25日（金）実施）の結果は以下のとおりである。

	問題内容	正答率
1	 物体が斜面を転がり落ちるとき，速度が最も大きいのは1～3の地点のうちどこか。	92.9% 1と誤答･･･2名 2と誤答･･･1名 3と解答･･･39名
2	太郎さんは 1kmを15分で歩く。太郎さんの歩く速度を求めなさい。	100% 正答･･･42名
3	$y=2x+1$の変化の割合を答えよ。	78.6% 正答･･･33名
4	$y=3x^2$でxの値が 2 から 3 まで変化するときの変化の割合を答えよ。	47.6% 正答･･･20名 3と誤答･･･ 6名

以上の結果から、物体が斜面を転がり落ちるとき次第に加速をしていくことや、距離を時間でわることで速度を求めることができることなど、本時の活動において必要不可欠である力は身についていることがわかる。

（3） 指導観

これまで曲線のグラフを描く際には、点をプロットし、それを繋ぐという活動を行ってきた。本単元では、生徒は初めて局所的な変化に着目しグラフを描く。また数学Ⅰの 2 次関数・数学Ⅱの図形と方程式での 2 次関数・円の接線に関する学習では「直線との共有点がただ1つとなるとき、この直線を接線という」と定義した。しかし本単元における接線の学習では極限の考え方を利用するため、これまでの接線のとらえ方とは大きく異なる。本時では、局所的な変化・極限の考え方へ目を向けさせるきっかけ作りとして、導入として物体（テーマパークのアトラクション）の運動の変化を考察する活動を行う。時間x（xの変化量）を限りなく0に近づけることで、それに伴って平均の速度（平均変化率）が瞬間の速度（微分係数）に限りなく近づいていくという極限の考え方を見出させる。修学旅行を目前に控えた生徒にとって興味を引く題材といえるだろう。
本時の振り返りシートには、「本日の授業で考えた瞬間の速度は、グラフ上で何を表すだろうか」という問いを設定している。次時では、生徒の振り返りシートに記述された内容を取り上げながら微分係数の図形的意味を見出す活動を行う。その際、GeoGebra を用いることで、視覚的にも理解ができるよう工夫する。
また、微分・積分学は物理学と深く関わりあっており、1 年次に学習した物理基礎の既習の知識と関連付け、より深く、体系的、教科横断的に学ぶことができる。そのため、新しく学習する概念や法則を、教員が一方的に提示するのではなく、瞬間の速さなどの生徒の経験・既習の知識に基づいた具体的な事象を通して学習することにより、数学的に考える能力を身に付けさせることを目指したい。

一般的に$(x^n)' = nx^{n-1}$が成り立つことを学ぶと、それ以降定義に従って微分係数・導関数を求める機会はほとんどなくなり、微分係数や導関数の本質を忘れてしまいがちである。しかし、次の節・数学Ⅲでは関数の増減と導関数の符号の関係から、増減表を作り、グラフの概形を考える。これがただの作業とならないよう、式で処理をしていることのグラフ上での意味を、生徒の思考をもとに丁寧に確認しながら授業を展開する。

３．　単元目標

・ 微分の考えについて、数学的活動を通して、その有用性を認識するとともに、微分係数や導関数の意味について理解し、関数の定数倍、和および差の導関数を求めることができる。
・ 関数の局所的な変化に着目し、日常の事象や社会の事象などを数学的に捉え、問題を解決したり、解決の過程を振り返って事象の数学的な特徴や他の事象との関係を考察したりすることができる。
・ 関数とその導関数の関係について考察できる。

４．　単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な技能	知識・理解
・事象を微分の考え方を用いて考察する良さを認識し、問題解決にそれらを活用しようとしたり、粘り強く考え数学的論拠に基づき判断しようとしたりしている。 ・問題解決の過程を振り返って思考を深めたり、評価・改善したりしようとしている。	・関数の局所的な変化に着目し、日常の事象や社会の事象などを数学的に捉え、問題を解決したり、解決の過程を振り返ったりして事象の数学的な特徴や他の事象との関係を考察できる。 ・関数とその導関数の関係について考察できる。	・関数を定義に従って微分をすることができる。 ・関数の定数倍、和および差の導関数を求めることができる。 ・微分を用いて、グラフの接線の方程式を求めることができる。	・微分係数や導関数の図形的な意味について理解している。 ・接点の座標が分かれば接線の方程式を求めることができることを理解している。

５．　指導と評価の計画

時間	学習内容 ●活動	評価 関	考	技	知	評価規準	評価方法
1 本時	微分の導入 ●物体が斜面を下るときの瞬間の速度について、局所的な変化に着目することで、正確な値を求める方法を考える。		○			・物体の速度の変化を数学的にとらえ、関数の局所的な変化に着目することで、瞬間の速度を知るための方法を考察する。【考】	観察 ノート 振り返りシート
2	微分係数の計算と接線の方程式 ●第１時で思考したことをもとに、平均変化率と微分係数の図形的意味を見出す。 実際に定義に従って微分係数を計算		○	○		・微分係数や導関数の図形的な意味を見出すことができる。【考】 ・定義に従って微分係数を計算するすることができる。【技】	観察 ノート 振り返りシート 考査

	することでグラフ上の点における接線の傾きを求める。						
3	導関数① ●物体が斜面を下るときの速度の変化の様子について考え、導関数を導く。関数とその導関数のグラフをかき、関係について考察する。適当な関数を与えたときに、導関数のグラフの概形を描くことができる力をつける。		○			・関数とその導関数の関係について考察できる。【考】	観察 ノート 振り返りシート 考査
4	導関数②・いろいろな関数の導関数 ●定義に従ってx, x^2, x^3などの導関数を求め、その結果からx^nの導関数を予想する。定数倍・和・差の導関数を求める。x以外の文字を変数とする関数の導関数を求める。			○		・関数の定数倍、和および差の導関数を求めることができる。【技】	観察 ノート 振り返りシート
5	微分係数と接線の方程式 ●第４時からしばらく時間が空くので、前半は既習事項の確認を行う。後半は、導関数を用いて微分係数を計算し、グラフ上の点における接線の方程式を求める。第6時に向けて、接線の方程式を求めるためには、接点の座標が分かればよいことを生徒から引き出す。	○			○	・微分係数や導関数の図形的な意味について理解している。【知】 ・接線の方程式を求めるために必要なものは何かを見出そうとする。【関】	観察 ノート 振り返りシート
6	グラフ上にない点から引いた接線 ●曲線上にない点から、曲線に引いた接線の方程式を求める。				○	・接点の座標が分かれば接線の方程式を求めることができることを理解している。【知】	観察 ノート 振り返りシート 考査
7	演習 ●教科書の補充問題や章末問題などの応用的な問題を行う。	○				・既習事項を活用し応用問題に積極的に取り組もうとする。【関】	

６． 本時案

（1） 教材： 平均変化率・微分係数

（2） 本時の目標

・物体の速度の変化を数学的にとらえ、関数の局所的な変化に着目することで、瞬間の速度を知るための方法を考察する。【考】

（3）　学習過程

<table>
<tr><th>段階
（時間）</th><th>ねらい</th><th>学習活動
（〇指示・説明、●発問・活動）</th><th>指導上の留意点及び評価</th></tr>
<tr><td>導入（3分）</td><td></td><td>〇この時間はテーマパークのアトラクションについて考えることを伝える。
<table><tr><td>〇本時で考えるアトラクションの紹介
所要時間　9 分 30 秒
全長　850m</td></tr></table>〇アトラクションが動いている様子を動画で見せる。</td><td></td></tr>
<tr><td>展開①（10分）</td><td>局所的な変化に着目させる</td><td>〇アトラクションが急降下している場面について考えることを伝える。
〇落下し始めてからの時間$x(s)$と、進んだ距離y(m)の表を与える。
<table><tr><td>x(s)</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>y(m)</td><td>3</td><td>12</td><td>27</td><td>48</td><td>75</td></tr></table>●「落下し始めて2秒後の速度はどうなる？」と問う。
【予想される生徒の反応】
S1：12÷2＝6（m/s）
S2：この表からは求められない。

●S1 の解答を前で共有し、「これでよいですか」と問う。

●S2 の意見を拾い、なぜ出せないと思うのか問う。
【予想される生徒の反応】
S3：1秒ごとの情報しかないから。

●「どのようなことが分かれば、2 秒後の速度が求められますか」と問う。
【予想される生徒の反応】
S4：2秒前後の情報
S5：関数が分かればいい

〇S4，S5 の生徒の発言を中心に，関数は$y = 3x^2$であることを確認する。</td><td>落下開始から約 2 秒後に撮影ポイントがある。

（速さ）＝（距離）÷（時間）で計算していることを確認する。

これは、2 秒後の層度ではないことを確認する。

T4：2 秒前後の情報を知るためには何が必要だろうか。
T5：どのような関数になるだろうか。</td></tr>
</table>

展開②（３０分）	落下し始めて２秒後の速度をできるだけ正確に知る方法を考える。	MQ：落下し始めて２秒後の速度をできるだけ正確に知る方法を考えよう！ 【考えられる生徒の反応】 S6：１～２秒と２～３秒の平均の速度を計算し、２つの速度の平均を考える。 $\frac{9+15}{2}=12$ S7：1.9～2.1 秒の平均の速度を計算 $\frac{3\times 2.1^2-3\times 1.9^2}{2.1-1.9}=12$ S8：１～２秒もしくは２～３秒の平均の速度を計算 $\frac{3\times 2^2-3\times 1^2}{2-1}=9$ $\frac{3\times 3^2-3\times 2^2}{3-2}=15$ S9：２～2.1 秒の平均の速度を計算 $\frac{3\times 2.1^2-3\times 2^2}{2.1-2}=12.3$ S10：1.9～2 秒の平均の速度を計算 $\frac{3\times 2^2-3\times 1.9^2}{2-1.9}=11.7$ S11：２～2.1 秒の平均の速度を因数分解を用いた方法で計算 $\frac{3\times 2.1^2-3\times 2^2}{2.1-2}=\frac{3(2.1+2)(2.1-2)}{2.1-2}$ $=3(2.1+2)$ $=12.3$ 〇S8 の解答を取り上げて、板書し、「これはどうですか」と生徒に問う。S9 の解答を取り上げて、計算の過程を生徒に説明させる。 〇S8 や S9 の速度は 0.1 秒間の平均の速度であることを確認する。 ●①「さらに正確に求めることはできるだろうか」と問う。	【数学的な見方・考え方】 物体の速度の変化を数学的にとらえ、関数の局所的な変化に着目することで、瞬間の速度を知るための方法を考察する。 今回は主に S8・S9・S10・S11 の意見を取り上げたい。本時では S6 や S7 の意見はあえて取り上げることはしないが、導関数の授業の中で振り返り、結果的に２次関数の場合は等しくなることを確認する。 仮に S6 や S7 の意見しか出てこない場合は「この速度は正しい速度なのでしょうか」と問い、他の方法でも速度の求め方を考え、同じ値が出てきたら正しいと言えそうだ ということを共有し S8～S11 の意見が出てくるのを待ちたい。 考えている時間の幅が大きいものから順に取り上げる。

		●②さらに時間の幅を小さく取り、計算をしている生徒を指名し、全体で共有する。 ●①②を何度か繰り返す。 ●「時間の幅をどこまで小さくすればいいのか」「きりがない」という生徒の言葉を拾い、「（どこまで小さくすればいいのか）みなさんはどう思いますか」と問う。 【予想される生徒の反応】 S9：限りなく0に近づける S10：限りなく小さくする S11：0にする S11 の声を拾い、「時間の幅を0にすると言っていますが、どうですか」と問う。 【予想される生徒の反応】 S12：求めることができない。 S13：0分の0になる 〇値が12に近づくことを確認したら、数値計算からいったん離れ、この12を導く方法について考えさせる。 ●困りが生まれたところで、黒板を見て、今考えていることや行ってきた処理をもう一度振り返るよう促す。 そのうえで、再度「12を導く方法」を考えたいことを確認する。 ●生徒に投げかけながら2～2＋h秒の平均の速度の式を作る。 $\frac{3(2+h)^2-3\cdot 2^2}{(2+h)-2}=3(2+h+2)=12+3h$ ●今作った式を使って2秒後の速度を考えさせる。時間の幅hを限りなく0に近づけるという極限の考え方を全体で共有しながら 2 秒後の瞬間の速度を求める。 〇lim の記号の説明をする。	文字や記号を用いて表している解答（$2+h$を 2.●等と記述しているものを含む）をしている生徒の声を拾いながら、式を作りたい。 そのような記述をしている生徒がいない場合は、「計算がめんどう」などの声を拾い、文字を使うことを生徒から引き出したい。 $\frac{3\cdot 2^2-3\cdot(2-h)^2}{2-(2-h)}$ や $\frac{3\cdot 2^2-3\cdot h^2}{2-h}$ などの式であっても取り上げ、その場合 $\frac{3(2+h)^2-3\cdot 2^2}{(2+h)-2}$ の式は導関数の導入時に触れる。

まとめ（7分）	振り返りシートを記入する 次回の予告	●GeoGebraを用いて授業の振り返りを行う。 ●MetaMoJiで振り返りシートを記入する。 〇「次回は瞬間の速度がグラフ上で何を意味するかを考える」ということを伝える。	振り返りシートでは「授業で大事だと思ったこと」「理解度」「瞬間の速度の図形的意味」について記述させる。 次回の授業で、生徒の振り返りシートに書かせた「図形的意味」の記述を取り上げる。

（4）　評価基準

【数学的な見方・考え方】

A （十分に満足）	B に加えて、時間の幅を文字で表し、この時間の幅を限りなく0に近づけることで、それに伴って速度が変化し、より正確な瞬間の速度を知ることができることを見出している。
B （おおむね満足）	物体の速度の変化を数学的にとらえ、局所的な変化に着目することで、時間を短くしていくことでより正確な瞬間の速度を知ることができることを見出している。
C （努力を要する）	B に達していない。

（5）　板書計画

問　2秒後の速度は？

12÷2＝6 m/s

↳2秒後の速度

ではない

xとyの関係式

$\boxed{y = 3x^2}$

Q　落下し始めて 2 秒後の速度をできるだけ正確に知る方法を考えよう！

$$\frac{3\times 2.1^2 - 3\times 2^2}{2.1-2} = 12.3$$

$$\frac{3\times 2.01^2 - 3\times 2^2}{2.01-2} = 12.03$$

$$\frac{3\times 2.001^2 - 3\times 2^2}{2.001-2} = 12.003$$

$$\frac{3\times(2+h)^2 - 3\times 2^2}{2+h-2} = 3(2+h+2)$$

$$= 12 + 3h$$

限りなく0に近づける↓

$\boxed{12}$

↓

$$\lim_{h\to 0}\frac{3\times(2+h)^2 - 3\times 2^2}{2+h-2} = \lim_{h\to 0} 12 + 3h = 12$$