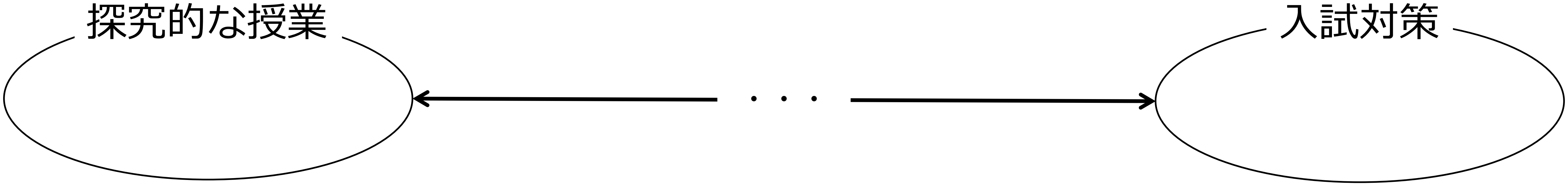
教科の授業の探究化
オンラインセミナー

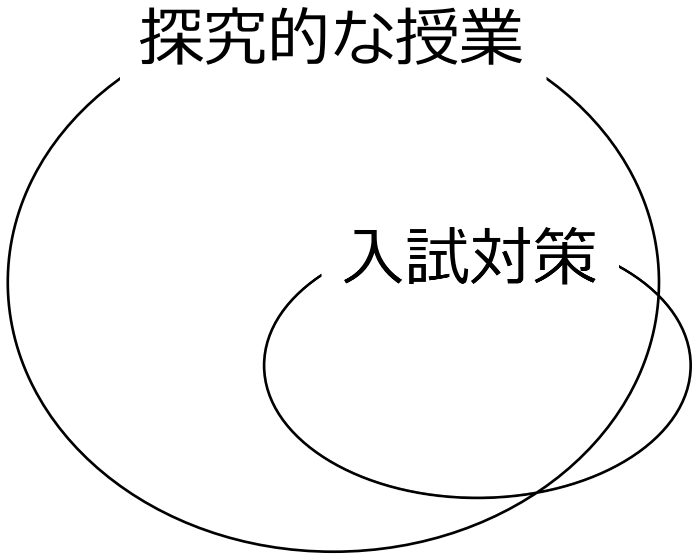
#1　進学校・数学科での挑戦

東京学芸大学
先端教育人材育成推進機構 高校探究プロジェクト



- 内容を早く終わらせてから入試対策
- 探究を重視すると入試対策が手薄にならないか心配・・・

「思考力・判断力・表現力」
「大学入試」　と　「主体的に学びに向かう態度」　の育成　の関係は？
「数学的な見方・考え方」



●別物と考えること自体が，生徒にとって「迷惑なこと」ではないか

●授業において，学びがいのある時間，振り返ったときに満足感のある時間を過ごさせるために

大学入試×探究

- ➢ 入試問題を使って探究する
- ➢ 通常の内容で探究する

【本日の問い】「~~を~~」

大学入試「も」見据えて，通常の授業を探究化する上で大切なことは？

本セミナーの構成

- ゴール
  1つの入試問題を紐解きます。
- ターゲット
  ゴールに到達するために，どのような内容・問題で，どのような授業をしておくことが有効かを提案します。
- 対話
  提案をもとに対話をし，扱う問題や授業展開の発想を膨らませます。

ゴールの検討

第　4　問

O を原点とする座標平面上で考える。0 以上の整数 k に対して，ベクトル $\overrightarrow{v_k}$ を

$$\boxed{\overrightarrow{v_k} = \left(\cos\frac{2k\pi}{3},\ \sin\frac{2k\pi}{3}\right)}$$

と定める。投げたとき表と裏がどちらも $\frac{1}{2}$ の確率で出るコインを N 回投げて，座標平面上に点 $X_0, X_1, X_2, \cdots\cdots, X_N$ を以下の規則 (i), (ii) に従って定める。

(i) X_0 は O にある。

(ii) n を 1 以上 N 以下の整数とする。X_{n-1} が定まったとし，X_n を次のように定める。

- n 回目のコイン投げで表が出た場合，

$$\overrightarrow{OX_n} = \overrightarrow{OX_{n-1}} + \overrightarrow{v_k}$$

により X_n を定める。ただし，k は 1 回目から n 回目までのコイン投げで裏が出た回数とする。

- n 回目のコイン投げで裏が出た場合，X_n を X_{n-1} と定める。

(1) $N = 5$ とする。X_5 が O にある確率を求めよ。

(2) $N = 98$ とする。X_{98} が O にあり，かつ，表が 90 回，裏が 8 回出る確率を求めよ。

東京大学　2022　文系

(1) $N = 8$ とする。X_8 が O にある確率を求めよ。

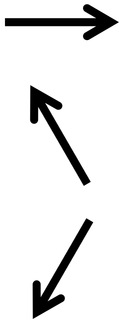
(2) $N = 200$ とする。X_{200} が O にあり，かつ，合計 200 回のコイン投げで表がちょうど r 回出る確率を p_r とおく。ただし $0 \leqq r \leqq 200$ である。p_r を求めよ。また p_r が最大となる r の値を求めよ。

東京大学　2022　理系

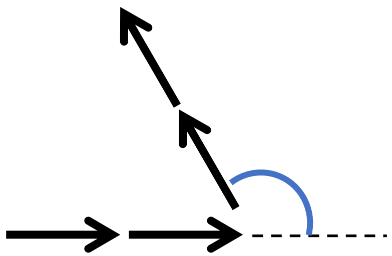
$$\overrightarrow{v_0} = (1,0)$$

$$\overrightarrow{v_1} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{v_2} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

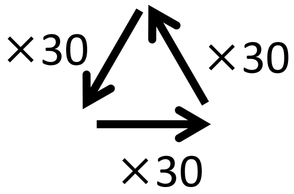


表→表→裏→表→表



- 原点スタート
- 裏が出たら120°回転
- 表が出たら向いている方向に1進む

表：90
裏：8
原点に戻る



【問題】
$\overrightarrow{v_0}$：30，$\overrightarrow{v_1}$：30，$\overrightarrow{v_2}$：30，裏：8
を1列に並べる並べ方は何通りか．
ただし，$\overrightarrow{v_0}$と$\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_1}$と$\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_2}$と$\overrightarrow{v_0}$の間には少なくとも1つ裏が入らなければならない．

$\boxed{\overrightarrow{v_0}}$ 裏 $\boxed{\overrightarrow{v_1}}$ 裏 $\boxed{\overrightarrow{v_2}}$ 裏 $\boxed{\overrightarrow{v_0}}$ 裏 $\boxed{\overrightarrow{v_1}}$ 裏 $\boxed{\overrightarrow{v_2}}$ 裏 $\boxed{\overrightarrow{v_0}}$ 裏 $\boxed{\overrightarrow{v_1}}$ 裏 $\boxed{\overrightarrow{v_2}}$

【問題】
30個の「$\overrightarrow{v_0}$」をA,B,Cの3つの箱に分ける分け方は何通りか．ただし，0個の箱があっても良い．

ターゲットの検討：木部先生から提案

- 木部先生からの提案は，重複組合せの問題です

× 重複組合せを理解させれば解ける

【本日の問い】

大学入試「も」見据えて，
通常の授業を探究化する上で大切なことは？

- 重複組合せの問題で，どのような授業をすることが大切か？

第　4　問

O を原点とする座標平面上で考える。0 以上の整数 k に対して，ベクトル $\overrightarrow{v_k}$ を

$$\overrightarrow{v_k} = \left(\cos\frac{2k\pi}{3},\ \sin\frac{2k\pi}{3}\right)$$

と定める。投げたとき表と裏がどちらも $\frac{1}{2}$ の確率で出るコインを N 回投げて，座標平面上に点 $\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \cdots\cdots, \mathrm{X}_N$ を以下の規則 (i), (ii) に従って定める。

(i) X_0 は O にある。

(ii) n を 1 以上 N 以下の整数とする。X_{n-1} が定まったとし，X_n を次のように定める。

- n 回目のコイン投げで表が出た場合，

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}_n} = \overrightarrow{\mathrm{OX}_{n-1}} + \overrightarrow{v_k}$$

により X_n を定める。ただし，k は 1 回目から n 回目までのコイン投げで裏が出た回数とする。

- n 回目のコイン投げで裏が出た場合，X_n を X_{n-1} と定める。

(1) $N=5$ とする。X_5 が O にある確率を求めよ。

(2) $N=98$ とする。X_{98} が O にあり，かつ，表が 90 回，裏が 8 回出る確率を求めよ。

⋮

重複組合せの問題

ターゲットの検討

教科・単元「数学A　場合の数と確率」

東京学芸大学附属高等学校
木部　慎也

提案

袋に入っているみかんを A,B,C,D の 4 人に分ける。ただし，0 個の人がいてもよい。
（1）みかんの個数が 3 個のとき，分け方は何通りあるだろうか。
（2）みかんの個数が 10 個のとき，分け方は何通りあるだろうか。

- (1)は個々の表現で具体的に書き出して数え上げられる範疇と思われる。（答えは20通り。）
- (2)を書き出すのは難しい。

自力解決

(2)で予想される主な反応

（10,0,0,0）

（9,1,0,0）（9,0,1,0）（9,0,0,1）

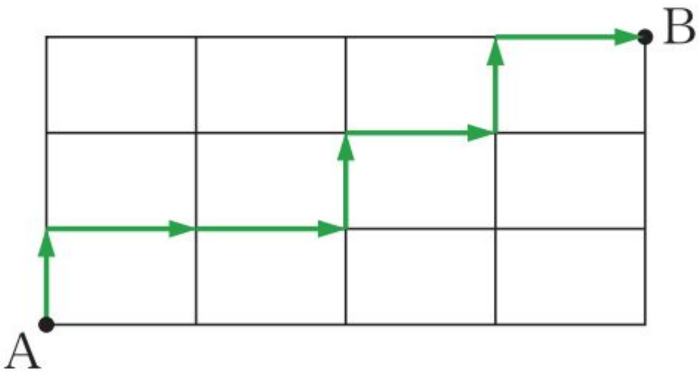
（8,2,0,0）（8,0,2,0）（8,0,0,2）（8,1,1,0）（8,1,0,1）（8,0,1,1）

・・・・・・・・

→場合分けでの考察は難しそう？これまではどう数え上げていた？

探究

最短経路を数え上げる



道順を「上右右上右上右」という文字列に対応させると，「上」の個数と「右」の個数は変わらず，並び方が変わっている。

→順列の考えが利用できるのではないか？

「上」の場所の組合せが変わっている。

→組合せの考えが利用できるのではないか？

探究

今回の問題で要素ごとに変わらないもの，変わるものは？

→みかんの総数は変わらない。変わるものは，

a. それぞれに配られるみかんの個数
b. それぞれのみかんが渡される人
c. 10個のみかんをイメージした時の区切りの場所
d. 「みかんを配る」という動作Pと「配る人を替える」という動作Qの並び方

探究

どのように表現できるか？

a. （3,4,2,1）
b. AAABBBBCCD
c. ○○○ | ○○○○ | ○○ | ○ → 13C3
d. PPPQPPPPQPPQP → 13!÷(10!×3!)

育てたい見方・考え方

（単元）

事象の構造などに着目し，場合の数を求める方法を多面的に考察することができる。

（本時）

場合の数を，より分かりやすいものと１対１に対応付けて考えることができる。

教科の授業の探究化　＃ 1 進学校・数学科での挑戦

2023/3/18 オンラインセミナー Ｚ会資料

■ ゴール

O を原点とする座標平面上で考える。0 以上の整数 k に対して，ベクトル $\overrightarrow{v_k}$ を

$$\overrightarrow{v_k} = \left(\cos\frac{2k\pi}{3},\ \sin\frac{2k\pi}{3}\right)$$

と定める。投げたとき表と裏がどちらも $\frac{1}{2}$ の確率で出るコインを N 回投げて，座標平面上に点 X_0，X_1，$\mathrm{X}_2, \cdots\cdots$ X_N を以下の規則 (i), (ii) に従って定める。

(i)X_0 は O にある。

(ii)n を 1 以上 N 以下の整数とする。X_{N-1} が定まったとし，X_N を次のように定める。

- n 回目のコイン投げで表が出た場合,

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}_n} = \overrightarrow{\mathrm{OX}_{n-1}} + \overrightarrow{v_k}$$

により X_n を定める。ただし，k は 1 回目から n 回目までのコイン投げで裏が出た回数とする。

- n 回目のコイン投げで裏が出た場合，X_n を X_{n-1} と定める。

(1)$N = 5$ とする。X_5 が O にある確率を求めよ。

(2)$N = 98$ とする。X_{98} が O にあり，かつ表が 90 回，裏が 8 回出る確率を求めよ。

（2022　東大文系）

■ ターゲット

袋に入っているみかんを A，B，C，D の 4 人に分ける。ただし，0 個の人がいてもよい。

(1) みかんの個数が 3 個のとき，分け方は何通りあるだろうか。

(2) みかんの個数が 10 個のとき，分け方は何通りあるだろうか。

■「ゴール」と「ターゲット」を見比べて

・「ゴール」と「ターゲット」の共通点は，重複組合せ，モデルを使った図式化でしょうか。重複組合せの「○と｜（仕切り）」を使う方法を教え込んでもつまらないし，自分で考えてもらいたい。知らなくても対応可能な (1) から入って，(2) を自分で考えてもらう流れはよいなあ，と感じました。

・その一方で，重複組合せの知識があれば，それだけで解けてしまいますでしょうか。本質的な理解や考え方が試されるような問題があればベターなのですが。。

・「ゴール」と「ターゲット」の距離がやや遠いでしょうか？どこに焦点を当てるべきでしょうか？あるいは間を繋ぐような問題があるとよいでしょうか？

■ ゴールの東大の問題が解けるためには？
①与えられた問題文から，ルールを正確に読み取ること
②（必要に応じて自分で）具体化（あるいは実験）して構造を把握すること
③数式を用いて，条件をみたす場合を洗い出すこと
④条件を重複組み合わせ（和の形の不定方程式の解）の問題に帰着できること
⑤重複組み合わせ（和の形の不定方程式の解）が扱えること

大きく分けると
　Ａ：いわゆる応用
　　汎用的な問題解決の考え方や行動（ストラテジー）：①，②，③
　Ｂ：いわゆる基礎
　　カリキュラム（コンテンツ）に紐づく考え方や知識・技能：④，⑤
のどちらに焦点を当てるか？

あるいは、基礎，応用という観点ではなく，これらをいかに繋ぐかという視点で
　Ｃ：間を繋ぐ問題
　Ｄ：別の視点として，モデル化，図式化をテーマに
を加えて、問題を挙げてみました。

（A）ランダムウォークを題材とする問題－表現・道具を変えること

▼動き方をいかに捉えるか？

＞未知数を設定し，数式を用いて考える

＞関数（対応関係）の見方を活用し，グラフを用いて考える

＞捉え方を工夫してみる

【１】座標平面上で x 座標と y 座標がいずれも整数である点を格子点という。格子点上を次の規則に従って動く点 P を考える。

(a) 最初に，点 P は原点 O にある。

(b) ある時刻で点 P が格子点 $(m,\ n)$ にあるとき，その 1 秒後の点 P の位置は，隣接する格子点 $(m+1,\ n)$, $(m,\ n+1)$, $(m-1,\ n)$, $(m,\ n-1)$ のいずれかであり，また，これらの点に移動する確率は，それぞれ $\dfrac{1}{4}$ である。

(1) 点 P が，最初から 6 秒後に直線 $y=x$ 上にある確率を求めよ。

(2) 点 P が，最初から 6 秒後に原点 O にある確率を求めよ。　（2017　東大）

【２】投げたとき表が出る確率と裏が出る確率が等しい硬貨を用意する。数直線上に石を置き，この硬貨を投げて表が出れば数直線上で原点に関して対称な点に石を移動し，裏が出れば数直線上で座標 1 の点に関して対称な点に石を移動する。

(1) 石が座標 x の点にあるとする。2 回硬貨を投げたとき，石が座標 x の点にある確率を求めよ。

(2) 石が原点にあるとする。n を自然数とし，$2n$ 回硬貨を投げたとき，石が座標 $2n-2$ の点にある確率を求めよ。　（2013　京大文系）

【３】数直線の原点上にある点が，以下の規則で移動する試行を考える。

（規則）サイコロを振って出た目が奇数の場合は，正の方向に 1 移動し，出た目が偶数の場合は，負の方向に 1 移動する。

k 回の試行の後の，点の座標を $X(k)$ とする。

(1)$X(10)=0$ である確率を求めよ。

(2)$X(1)\fallingdotseq 0,\ X(2)\fallingdotseq 0,\ \cdots,\ X(5)\fallingdotseq 0$ であって，かつ，$X(6)=0$ となる確率を求めよ。

(3)$X(1)\fallingdotseq 0,\ X(2)\fallingdotseq 0,\ \cdots,\ X(9)\fallingdotseq 0$ であって，かつ，$X(10)=0$ となる確率を求めよ。

（2010　千葉大）

（B）重複組合せの問題から

▼重複組合せの考え方を学ぶ場面でどういう問題があるか？

>④，⑤の本質的な理解は

　モデル（図式化）を利用した読み替え

であり，公式だけで対応しにくい問題があるか？

【1】不定方程式

<基本>

$x+y+z=10$（x，y，z は 0 以上の整数）

<変数変換など>

$x+y+z=10$（x，y，z は正の整数／ x，y，z は 2 以上の整数）

$x+y+z \leqq 10$（x，y，z は 0 以上の整数）

【2】複数

<基本>

りんご 5 個，みかん 4 個，もも 3 個を A さん，B さん，C さんの 3 人で分けるとき，分け方は何通りあるか。

<不定方程式>

$xyz=2000$（x，y，z は正の整数）

【3】順序

<出して並べる>（組み合わせと合わせて）

サイコロを 3 回投げて出た目を順に x，y，z とするとき

(1)$x<y<z$ をみたす場合の数

(2)$x \leqq y \leqq z$ をみたす場合の数

<桁の数字の並び>

5 桁の自然数 N の各桁の数字を上から順に a，b，c，d，e とする。つまり，一万の位が a，一の位が e である。このとき，$a \geqq b \geqq c \geqq d \geqq e$ をみたす N は何個あるか。

（C）間を繋ぐ問題

▼「ゴール」と「ターゲット」の間を繋ぐ問題がないか？
＞重複組み合せの考え方を用いることができて，間をつなぐような問題がないか？

【1】箱の中に 1 から n までの番号がついた n 枚の札がある。ただし $n \geqq 5$ とし，同じ番号の札はないとする。この箱から 3 枚の札を同時に取り出し，札の番号を小さい順に X, Y, Z とする。このとき，$Y - X \geqq 2$ かつ $Z - Y \geqq 2$ となる確率を求めよ。（2022　京大）

【2】m, n は $3 < m < n$ をみたす整数であるとする。下図のような，縦の道が n 本，横の道が m 本ある街路があるとする。A 地点から B 地点へ道を通って行く方法の中で，以下をみたすものを考える。ただし，「曲がる」とは，右折または左折することを意味する。また，道の幅は無視できるものとする。

4 回曲がって A 地点から B 地点へ最短距離で行く方法は，何通りあるか求めよ。

（2018　京都教育大・改／図省略）

【3】N を 5 以上の整数とする。1 以上 $2N$ 以上の整数から，相異なる N 個の整数を選ぶ。ただし 1 は必ず選ぶこととする。選んだ数の集合を S とし，S に関する以下の条件を考える。

条件 1：S は連続する 2 個の整数からなる集合を 1 つも含まない。

条件 2：S は連続する $N-2$ 個の整数からなる集合を少なくとも 1 つ含む。

ただし，2 以上の整数 k に対して，連続する k 個の整数からなる集合とは，ある整数 l を用いて $\{l,\ l+1, \cdots\cdots,\ l+k-1\}$ と表される集合を指す。例えば，$\{1,2,3,5,7,8,9,10\}$ は連続する 3 個の整数からなる集合 $\{1,2,3\}$，$\{7,8,9\}$，$\{8,9,10\}$ を含む。

(1) 条件 1 を満たすような選び方は何通りあるか。
(2) 条件 2 を満たすような選び方は何通りあるか。（2021　東大文系）

（D）モデル，図式化

▼単元（コンテンツ）は異なるが，肝となる考え方が活かせる問題がないか？
＞重複組み合せに限らず，肝となる「モデル」，「図式化」がカギになる問題がないか？

【1】白石 180 個と黒石 181 個の合わせて 361 個の碁石が横に一列に並んでいる。碁石がどのように並んでいても，次の条件を満たす黒の碁石が少なくとも一つあることを示せ。

その黒の碁石とそれより右にある碁石をすべて除くと，残りは白石と黒石が同数となる。ただし，碁石が一つも残らない場合も同数とみなす。（2001　東大文系）

【2】円周上に m 個の赤い点と n 個の青い点を任意の順序に並べる。これらの点により，円周は $m+n$ 個の弧に分けられる。このとき，これらの弧のうち，両端の色が異なるものの個数は偶数であることを証明せよ。ただし，$m \geqq 1$, $n \geqq 1$ であるとする。（2002　東大文系）

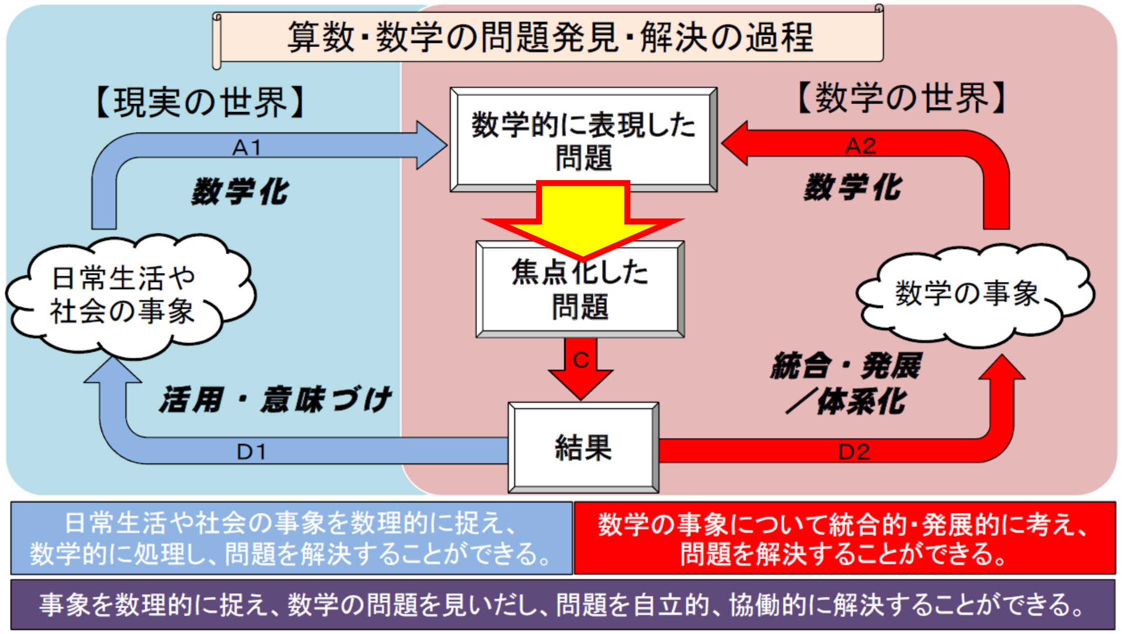
対話の視点

【本日の問い】

大学入試「も」見据えて,
通常の授業を探究化する上で大切なことは？

■初見の問題を，自分が処理可能な数学の問題に置き換える

- ➢何が決まれば，何が決まるか(関数の考え)



✕ 解説 → 演習

〇 問題 → 自力解決 → 比較検討 → まとめ

必要不可欠

どんな
数学的な見方・考え方を
身につけさせたいか